UNITARIEDAD Y UNICIDAD DE LA TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS EN COSMOLOGÍA.

TRANSFORMACIONES CANÓNICAS DEPENDIENTES DEL TIEMPO Y DE LOS MODOS.

Lucía Fonseca de la Bella
Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Complutense de Madrid

Trabajo académicamente dirigido por
Guillermo A. Mena Marugán
Instituto de Estructura de la Materia, CSIC

Luis J. Garay Elizondo
Departamento Física Teórica II, Facultad de Ciencias Físicas,
Universidad Complutense de Madrid

ÍNDICE

I. INTRODUCCIÓN

- **Teoría Cuántica de Campos**: infinitos g.l.

- **Cuantización stma. clásico**, no único, ambigüedades, QT's no equivalentes→ descripciones cuánticas distintas.

- Resolver ambigüedades→ única descripción.

- **Mecánica Cuántica:** (finitos g.l.) teorema de **Stone-Von Neumann.**

➢ Teoría cuántica de campos:

- **Campos cuánticos lineales**: infinitas rep. de Fock no equivalentes de las CCR's.

- **Campos de Klein-Gordon**, s-t Minkowski, una rep. de Fock única → simetría del fondo (estado invariante Poincaré: **el vacío**).

- **S-t menos simétricos pero estacionarios** → sobre la energía.

- **s-t genéricos** o campos escalares lineales con masa* dpte. de t.→ se pierde la estacionaridad.

- **Cosmología cuántica**: **teoremas de unicidad** → invariancia del vacío y unitariedad de la dinámica.

  a) **Única representación de Fock** (eq. unitaria).
  b) **Descripción del campo privilegiada.**

- **¡IMP!** Secciones espaciales compactas. (**límite infrarrojo**)

MOTIVACIÓN DEL TRABAJO:

- Redefinir (**tiempo y modos armónicos**) campo escalar → ¿siguen verificándose estos resultados de unicidad?

- **Perturbaciones cosmológicas**

  T.C. lineales modo a modo → entre descripciones físicas (fijado el gauge) **y** cuantización construida a partir de invariantes de Bardeen.

- Objetivo: **T.C modo a modo** (**no local**) son unitarias → equivalencia entre las descripciones.

- Se respeta la **simetría de la dinámica** → no implementamos T.C. q mezclen modos que la dinámica no mezcle.

- **Generalización** de T.C. globales, sin distinguir entre los diferentes modos (hasta ahora).

PASOS

1. T.C. campo escalar lineal + condiciones → relaciones (modo a modo) entre el nuevo y el original par canónico.

2. Coeficientes beta de Bogoliubov.

3. Equivalencia unitaria.

TRANSFORMACIÓN CANÓNICA DEL CAMPO

- **Campo escalar**, ec. **Klein-Gordon**, masa dpte.de t, variedad espacial compacta, s-t curvo no estacionario.

- **Criterios** → estado de vacío invariante bajo simetrías espaciales e implementación unitaria de la dinámica.
  a) **Representación de Fock** única (eq. unitaria)
  b) **Representación privilegiada:** asociada de forma natural al caso sin masa.

- **Ecuación del campo** $\ddot{¤} - \Delta ¤ + s(t) ¤ = 0$
- **El espacio de fases**.

o **Campo escalar**: modos del op. L-B.

Espacio de configuración del campo (***n≠0***)

$$\{q_{nl}\}, n = 1,\ldots, l = 1,\ldots, g_n$$

Espacio de momento

$$p_{nl} = \dot{q}_{nl}$$

o **Ecs. de movimiento** (mismo n, mismas ecs.)

$$\ddot{q}_n + [\omega_n^2 + s(t)]q_n = 0,$$
$$\ddot{p}_n + [\omega_n^2 + s(t)]p_n + \dot{s}(t)q_n = 0,$$

- T.C. lineales dependientes del tiempo (y modos*). La T. de las vbles.configuración:

$$\Gamma = f(t)\frac{P_\phi}{\sqrt{h}} + g(t)\phi$$

Nota: notación simbólica y el momento del campo es una densidad escalar.

- Nuevo campo → ec. **Klein-Gordon** (análoga a la del original)

$$\ddot{\Gamma}_n + [\omega_n^2 + T_n(t)]\Gamma_n = 0$$

- **Nuevas vbles. configuración y momento**

$$\begin{aligned}\Gamma_n &= f(t)p_n + g(t)q_n,\\ \tilde{P}_n &= \left[\frac{1}{g(t)} - 2f(t)B_n(t)\right]p_n - 2B_n(t)g(t)q_n.\end{aligned}$$

$B_n(t)$ se determina a partir de $\tilde{P}_n \equiv \dot{\Gamma}_n$

$$\begin{aligned}B_n(t) &= \frac{1-\dot{f}(t)g(t)-g^2(t)}{2f(t)g(t)},\\ B_n(t) &= \frac{S_n(t)f(t)-\dot{g}(t)}{2g(t)}.\end{aligned} \qquad S_n(t) = \omega_n^2 + s(t).$$

- Corchetes de Poisson → **T.C**.

- Condición

$$-S_n(t)f(t) + \dot{g}(t) = \frac{-1 + \dot{f}(t)g(t) + g^2(t)}{f(t)}.$$

$$S_n(t) = \omega_n^2 + s(t).$$

- Únicas T.C. posibles **no triviales**: dependen de ***t*** y ***n***.

- Se obtiene la relación

$$\boxed{\dot{G}(t) = G(t)^2 + \omega_n^2 + s(t) - \frac{1}{f(t)^2}}$$

con $G(t)=g/f$.

COEF. BETA BOGOLIUBOV

- **Vbles. de creación y aniquilación** para los nuevos pares canónicos y para los originales (sin masa):

$$b_n^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}}[\omega_n \Gamma_n - i\tilde{P}_n], \qquad a_n^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}}[\omega_n q_n - i p_n],$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}}[\omega_n \Gamma_n + i\tilde{P}_n]. \qquad a_n = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}}[\omega_n q_n + i p_n].$$

- **Transformación de Bogoliubov:**

$$\begin{pmatrix} b_n \\ b_n^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n^* & \alpha_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_n^\dagger \end{pmatrix}$$

$$|\sim_n|^2 - |\quad_n|^2 = 1 \qquad \forall entero\ \ n \geq 1.$$

- Expresión para el conjunto de coeficientes beta de Bogoliubov:

$$\boxed{\beta_n = \frac{\dot{f}(t)}{2} + \frac{i}{2\omega_n}\left[s(t)f(t) - \dot{g}(t)\right]}$$

independiente del índice de degeneración.

EQUIVALENCIA UNITARIA

- Las cuantizaciones de Fock seleccionadas →**unitariamente equivalentes** entre sí.

- T.C. lineal → implementación unitaria sii

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{g_n}\left|\ _{nl}\right|^2=\sum_{n=1}^{\infty}g_n\left|\ _n\right|^2<\infty$$

- El <u>vacío</u> de la nueva cuantización de Fock contiene siempre un # finito de partículas.

$$\dot{G}(t) = G(t)^2 + \omega_n^2 + s(t) - \frac{1}{f(t)^2}$$

$$\beta_n = \frac{\dot{f}(t)}{2} + \frac{i}{2\omega_n}\left[s(t)f(t) - \dot{g}(t)\right]$$

- f(t) y g(t) **expansión asintótica**

  (potencias enteras de μ_n)

- Sumabilidad (requisito) → $|\beta_n| \sim O\left(\frac{1}{\omega_n^2}\right)$

$$\dot{f}(t) \sim O\left(\frac{1}{\omega_n^2}\right), \quad s(t)f(t) - \dot{g}(t) \sim O\left(\frac{1}{\omega_n}\right).$$

- Ec de G (comprobamos)→

$$f(t) \sim O\left(\frac{1}{\omega_n}\right), \ \dot{g}(t) \sim O\left(\frac{1}{\omega_n}\right).$$

- Las familias de funciones f (t) y g(t):

$$f(t) = \frac{c_k(t)}{\omega_n^k} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_{k+r}(t)}{\omega_n^{k+r}},$$

$$g(t) = d_k(t) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d_{k+r}(t)}{\omega_n^{k+r-1}}.$$

donde $c_k(t) \neq 0, \forall k \geq 1.$

- Función de masa de la ec. del campo:

$$T_n(t) = s(t) - \frac{\ddot{f}(t) + 2\dot{g}(t)}{f(t)}.$$

- **Caso *k=1***:

Función de masa:

$$T_n(t) \sim s(t) - \frac{\ddot{c}_1(t) + 2\dot{d}_1(t)\omega_n}{c_1(t)} + O\left(\frac{1}{\omega_n}\right)$$

Necesitamos que, al menos, d_1 sea cte.

f(t) y *g(t)* en serie de potencias de μ_n

$+$

Ec. de balance entre *f(t)* y *g(t)*

⬇

$c_1^2 + d_1^2 = 1$ (dos subcasos)

i. **Subcaso (I)** $d_1 \neq 0$

$$\left.\begin{array}{rcl} f(t) & = & \frac{c_1}{\omega_n} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_{1+r}(t)}{\omega_n^{1+r}} \\ g(t) & = & d_1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d_{1+r}(t)}{\omega_n^{r}} \end{array}\right\}$$

i. **Subcaso (II)** $d_1 = 0$

$$\left.\begin{array}{rcl} f(t) & = & \pm\frac{1}{\omega_n} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_{1+r}(t)}{\omega_n^{1+r}} \\ g(t) & = & \frac{d_2(t)}{\omega_n} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d_{2+r}(t)}{\omega_n^{r+1}} \end{array}\right\}$$

Coef. Beta → cuadrado sumable.

F. masa

$$T_n(t) \sim s(t) + O\left(\frac{1}{\omega_n}\right).$$

- **Caso *k*≥2**:

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= \frac{c_k}{\omega_n^k} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_{k+r}(t)}{\omega_n^{k+r}} \\ g(t) &= \pm 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d_{k+r}(t)}{\omega_n^{k+r-1}} \end{aligned}\right\}$$

Coef. Beta → cuadrado sumable.

Función de masa

$$T_n(t) \sim s(t) - \frac{\ddot{c}_k(t)}{c_k(t)} + O\left(\frac{1}{\omega_n}\right)$$

límite asintótico bien definido.

RESUMEN Y DISCUSIONES

- **Campo escalar**, ec. Klein-Gordon, masa dpte. de t, variedad espacial compacta, s-t curvo no estacionario.
- **Única rep. Fock**.
- **T.C. lineales** (tiempo y los modos) → redefinición del campo:
  a) **Simetría de la dinámica**→ no se implementan T.C. que mezclen modos.
  b) **Ecs. de movimiento** similares a las de partida.
     i. **Ec. Klein Gordon,** masa dpte. t (correcciones despreciables en límite UV).
     ii. **Ec. Hamiltoniana**.
- ¡<u>Equivalencia unitaria</u> de todas **las cuantizaciones de Fock** (asumiendo criterios)**!**

- **Solidez teoremas de unicidad** para la cuantización de Fock de un campo escalar con masa dependiente del tiempo en una variedad espacial compacta.

- **Generalización** de T.C.$\rightarrow$ única descripción física cuántica de tipo Fock, incluso para redefiniciones del campo dependientes del tiempo y de los modos.

- Comportamiento asintótico de *f(t)* y *g(t)*.

- **Caso *k=1***.

- ***Subcaso I:*** $d_1 \neq 0 \rightarrow f(t) \sim O\left(\frac{1}{\mu_n}\right), g(t) \sim O(1)$.

  modos de configuración son c.l. de los originales y los modos de momento explotan en el límite UV.

- ***Subcaso II:*** $d_1 = 0 \rightarrow f(t) \sim O\left(\frac{1}{\mu_n}\right), g(t) \sim O\left(\frac{1}{\mu_n}\right)$.

  nuevos modos de configuración son c.l. de originales que se anulan y los modos de momento explotan en el límite asintótico.

❖ Caso $k \geq 2$:

$$f(t) \sim O\left(\frac{1}{\mu_n}\right) \quad y \quad g(t) \sim O(1)$$

Los nuevos modos coinciden asintóticamente con los originales.

- Posible extensión de este trabajo al caso de **campos fermiónicos** (D'Eath&Halliwell- **1987**).

¡GRACIAS!

Este trabajo ha dado lugar a un manuscrito que se enviará a publicar a ***Physical Review D***.